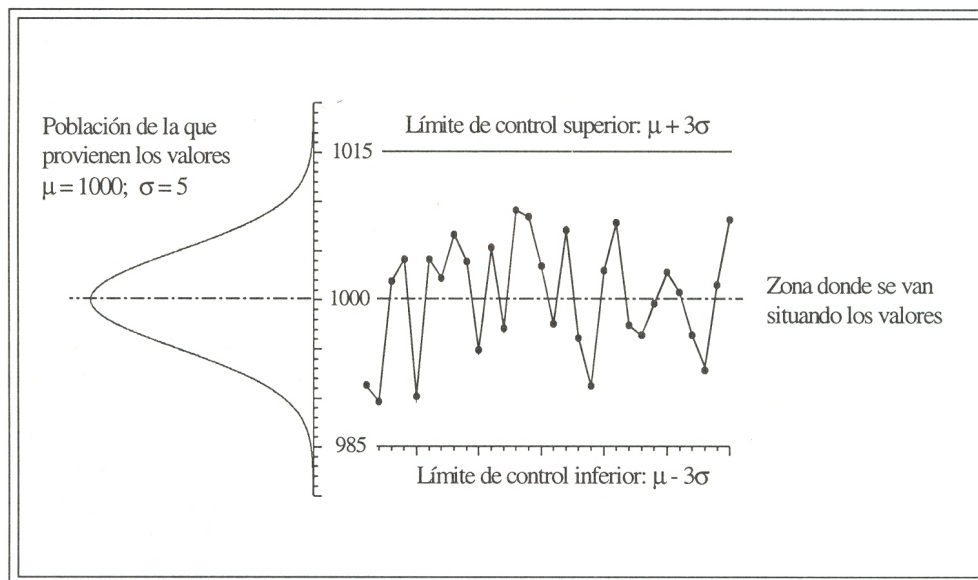


Una nueva visión del análisis de sensibilidad de un gráfico de control de medidas individuales comparado con el de un gráfico de control de medias.



Roberto Behar Gutiérrez

Profesor Titular de la Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística
Universidad del Valle, Cali, Colombia.
robear@pino.univalle.edu.co

Pere Grima Cintas

Profesor Titular Departamento de Estadística e Investigación de Operaciones
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
pere.grima@upc.es

Javier Olaya Ochoa

Profesor Titular de la Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística,
Universidad del Valle, Cali Colombia.
olaya@univalle.edu.co

Se comparan dos estrategias de control del centramiento de un proceso que se comporta según una distribución Normal. Una estrategia utiliza una observación cada dos minutos y la otra utiliza cuatro observaciones cada ocho minutos, con el propósito de tomar la decisión sobre si hay o no evidencia de que se ha presentado un cambio en el centro del proceso. La intención de esta selección de tamaños de muestra y de frecuencia de muestreo es hacer que las dos estrategias sean comparables, porque en el lapso de ocho minutos se muestrearían como máximo cuatro unidades en cada una de las dos estrategias. Se comparan las probabilidades de que cada una de estas estrategias permita detectar un cambio permanente y estable del centro del proceso; se evalúa el tiempo esperado hasta que el gráfico de control indique que se produjo el cambio; y, finalmente, se estima el número esperado de unidades que deben revisarse antes de que el gráfico de control revele que el centro del proceso ha cambiado. Por último se evalúa el efecto de los cambios en la magnitud del descentramiento, se comparan los resultados para ambas estrategias y se formulan recomendaciones.

Palabras clave: Control estadístico de procesos, distribución geométrica, longitud promedio de tanda (ARL)

1. Introducción

Un ingeniero está a cargo de un proceso de llenado

de paquetes de azúcar con un peso nominal de 1000 gramos y para asegurarse que el proceso permanece centrado (es decir, llena los paquetes con un peso medio igual al valor objetivo) debe

decidir entre pesar un paquete cada dos minutos y utilizar este peso individual para controlar el centramiento o pesar cuatro paquetes cada ocho minutos y utilizar el peso promedio para controlar el centramiento. En ambos casos se pesarían cuatro paquetes de azúcar, aunque en el primer caso se pesan a lo largo de los ocho minutos que dura el periodo de muestreo y en el segundo se toman los cuatro paquetes al final de los ocho minutos. Se comparan en este trabajo las dos estrategias de muestreo en términos de qué tan probable es la detección de un cambio de magnitud α en el centramiento del proceso, de cuál es el tiempo esperado hasta que la estrategia detecte un cambio de tal magnitud una vez se produzca y, finalmente, del número de paquetes que deben ser revisados antes de que la estrategia detecte que se produjo el cambio.

En ambos casos se asume que tanto los tamaños de los subgrupos (uno y cuatro paquetes) como las frecuencias de muestreo (cada dos y cada ocho minutos) son racionales para este proceso. La racionalidad se entiende en el sentido que Shewhart usa en sus definiciones sobre gráficas de control (Montgomery, 1991).

1.1 Pesar un paquete cada dos minutos

¿Qué diferencia del peso de uno de estos paquetes respecto al valor objetivo debería hacer pensar al ingeniero que el proceso se ha descentrado?

Dos posibles repuestas serían:

- Más o menos 10 gramos, porque esta ya es una diferencia apreciable
- Cuando el peso obtenido esté por fuera de las tolerancias, porque esto es lo que realmente importa.

Ambas respuestas son incorrectas. La primera porque el valor 10 gramos es arbitrario, ¿por qué 10 y no 5, ó 15? La segunda porque quizá es posible detectar descentramientos del proceso mucho antes de tener paquetes fuera de tolerancias. Lo aconsejable sería estudiar cuál es la variabilidad intrínseca del proceso¹ y en función de esa variabilidad establecer los valores a partir de los cuales se juzgaría que el proceso se ha descentrado. Por ejemplo, si los pesos de los paquetes siguen una distribución Normal, el proceso está centrado y del estudio de variabilidad se deduce que la desviación tipo del proceso (σ) es igual a 5 gramos, entonces el 99,7% de los paquetes ten-

drá un peso situado en el intervalo $1000 \pm 3\sigma$, es decir, entre 985 y 1015 gramos.

Como se ilustra en la Figura 1, una estrategia posible es establecer los límites de control en estos valores, y si el peso de uno de estos paquetes resulta estar por debajo de 985 o por encima de 1015 gramos, se dice que el proceso se ha descentrado. Como este procedimiento no está libre de la comisión de errores, conviene tener presente que bajo las condiciones establecidas el riesgo de concluir que el proceso está descentrado cuando en realidad no lo está, será del orden del 3 por mil.

Ahora bien, si el proceso se descentra hacia arriba sin cambiar su variabilidad intrínseca y pasa a llenar los paquetes en torno a 1010 gramos, entonces la probabilidad de identificar el descentramiento en la primera medición es igual a la probabilidad de obtener un valor mayor de 1015 (por encima del límite superior establecido)² de una distribución $N(1010; 5)$, tal como se ilustra en la Figura 2, y esta probabilidad se puede calcular de la forma:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1015 - 1010}{5} = 1; \quad P(z > 1) = 0,16$$

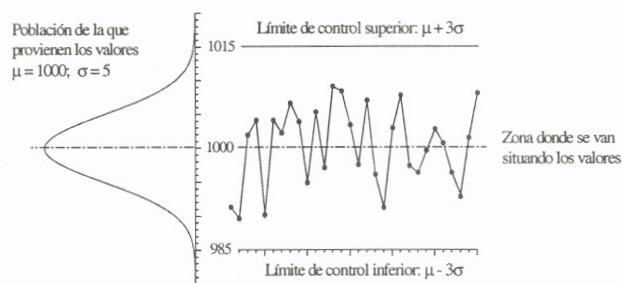


Figura 1: Esquema de sistema de control con límites $\pm 3\sigma$ del valor central

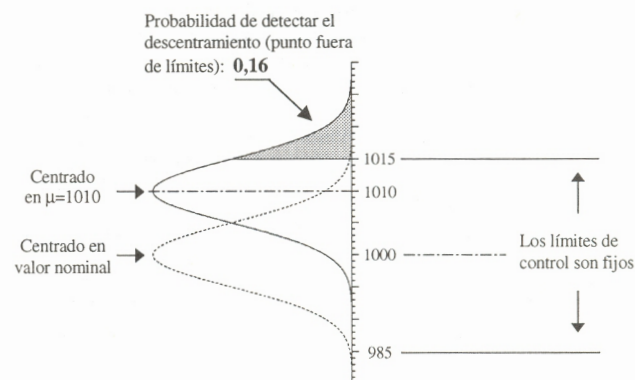


Figura 2: Probabilidad de detectar el descentramiento controlando unidades individuales

Por tanto, la probabilidad de detectar el descentramiento al hacer la primera medición es 0,16. Esta es la probabilidad de detectar que el proceso está ahora centrado en un valor diferente del deseado, cuando se mide el peso del paquete que se debe muestrear justo después de que el cambio ha ocurrido. Esta información será muy útil para efectos comparativos. Por ahora se evaluará la probabilidad similar, de detectar el cambio con el primer promedio para el caso del muestreo de cuatro paquetes cada ocho minutos.

1.2 Pesar cuatro paquetes cada ocho minutos

La probabilidad de detectar que el proceso está ahora centrado en un valor diferente del deseado con la primera medición del peso promedio de cuatro paquetes requiere tener en cuenta que, en este caso, los límites de control estarán adaptados a la distribución de las medias. Como se sabe,

$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ por lo que, en este caso, resultará que la desviación tipo de las medias es $\sigma_{\bar{x}} = 5/\sqrt{4} = 2,5$ y por tanto los límites deberán estar a $1000 \pm 7,5$ gramos.

Si se asume como en el caso anterior que el proceso se descentra y pasa a empacar en torno a 1010 gramos, sin que la variabilidad intrínseca cambie, la distribución de las medias de muestras de tamaño $n = 4$ será $N(1010; 2,5)$ y la probabilidad de que una media salga de límites es (Figura 3):

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1007,5 - 1010}{2,5} = -1; \quad P(z > -1) = 0,84$$

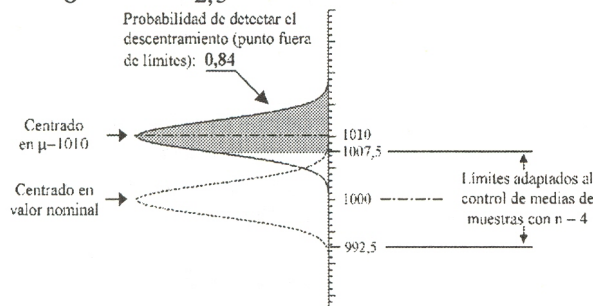


Figura 3: Probabilidad de detectar el descentramiento cuando se controlan medias de 4 observaciones

Nótese que esta probabilidad 0,84 de detección con el promedio aritmético de los pesos de los paquete-

¹ En general, en los casos de medidas individuales, se acostumbra estimar la variación del proceso utilizando el Rango promedio obtenido a partir de Rangos móviles. Véase Grant (1996)

² Se calcula sólo la probabilidad de que salga por encima del límite superior, ya que la probabilidad de que salga por debajo del límite inferior es despreciable en este caso.

tes del primer subgrupo racional de tamaño cuatro posterior al cambio, es mayor que la probabilidad 0,16 de detección usando el peso del primer paquete posterior al cambio. Pero la comparación directa no sería muy justa, porque se usan tamaños de subgrupo y tiempos de muestreo diferentes.

2. Comparaciones para un cambio de magnitud fija

2.1 Primera comparación

En este problema se configura un modelo probabilístico discreto comúnmente denominado modelo Geométrico, así llamado porque la función de distribución de la variable aleatoria discreta asociada con el modelo se define con una serie geométrica finita (Wackerly, 2002). Se asume que el proceso cambia de centro y permanece en el nuevo centro (Grant, 1996). En este caso la probabilidad de detectar el cambio con uno cualquiera de los primeros cuatro paquetes es igual a:

$$P[\text{Detectar el cambio con el primer paquete}] + P[\text{No detectarlo con el primero, pero sí con el segundo}] + P[\text{No detectarlo con el primero ni con el segundo, pero sí con el tercero}] + P[\text{No detectarlo con el primero ni con el segundo ni con el tercero, pero sí con el cuarto}] = 0,16 + 0,84 \times 0,16 + 0,84^2 \times 0,16 + 0,84^3 \times 0,16 = 0,5021$$

En este resultado la suma se justifica porque los cuatro eventos son mutuamente excluyentes. Y el producto se justifica porque las pruebas son independientes.

Es decir, la probabilidad de detectar que se ha producido el descentramiento después de pesar cuatro paquetes uno por uno cada dos minutos es aproximadamente 0,5 si se llevan sus pesos a un gráfico de valores individuales, y aproximadamente 0,84 si se lleva el promedio del peso de cuatro paquetes tomados simultáneamente a los ocho minutos a un gráfico de medias, como se ilustra en la Figura 4.

2.2. Segunda comparación

Podría objetarse que en el caso del control por medias se pasa mucho tiempo sin controlar y que si, por ejemplo, el descentramiento se produce 1 minuto después del último control, con el sistema de control de medias es imposible enterarse hasta pasados 7 minutos (cuando se produce el próxi-

mo control), mientras que con el control individual esta detección ya puede producirse dentro de tan sólo 1 minuto.

Efectivamente esta circunstancia se puede dar, pero lo relevante es conocer el tiempo medio que pasará antes de detectar el descentramiento con ambas estrategias. Llamando T_1 al tiempo que pasa desde el descentramiento hasta la detección con el control individual, $E(T_1)$ a su esperanza matemática y apoyándose en el modelo geométrico se tiene que:

$$E(T_1) = 1 \times 0,16 + 3 \times 0,16 \times 0,84 + 5 \times 0,16 \times 0,84^2 + \dots$$

Escrito de forma compacta y completa:

$$E(T_1) = \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1) \times 0,16 \times 0,84^{i-1}$$

Y haciendo las operaciones se obtiene que:

$$E(T_1) = 11,50 \text{ minutos.}$$

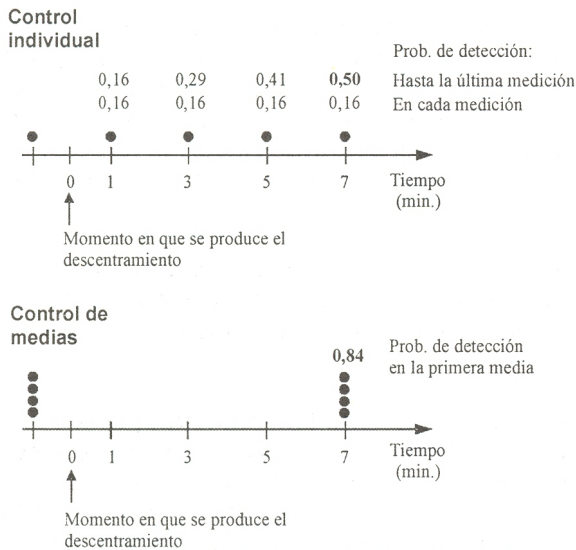


Figura 4: Comparación de las probabilidades de detección controlando medias de 4 observaciones y controlando observaciones individuales.

Sea ahora T_4 el tiempo que pasa desde el descentramiento hasta su detección controlando medias de cuatro observaciones. Se tiene ahora:

$$E(T_4) = 7 \times 0,84 + 15 \times 0,84 \times 0,16 + 23 \times 0,84 \times 0,16^2 + \dots$$

Escribiéndolo de forma compacta y calculando. Se obtiene:

$$E(T_4) = \sum_{i=1}^{\infty} [(7+8(i-1))] \times 0,84 \times 0,16^{i-1} = 8,52 \text{ minutos}$$

Es decir, en el caso de que se descentre 1 minuto después del último control, y a pesar de que el control individual tiene 3 oportunidades de detección antes que el control de medias, en promedio detectaremos antes el descentramiento controlando medias que observaciones individuales. Si el descentramiento se produjera, por ejemplo, en los minutos 2, 4 ó 6 el tiempo medio hasta la detección con el control individual seguiría siendo 11,50 minutos, mientras que controlando medias sería de 7,52; 5,52 y 3,52 minutos respectivamente.

2.3. Tercera comparación

Una vez analizado el tiempo necesario hasta que se detecte el cambio en el centro del proceso, surge la pregunta sobre cuál será el número promedio de piezas que deberán revisarse antes de que el gráfico indique que se ha producido tal cambio, porque este indicador tiene asociado el costo de las pruebas necesarias para detectar el cambio. Este indicador es más adecuado que el número de subgrupos necesarios para tomar la decisión, porque los subgrupos pueden ser, como en este caso, de tamaño diferente.

Se sabe que el valor esperado de la variable aleatoria geométrica X que cuenta el número de pruebas hasta que se detecta que se produjo un

cambio en el centro del proceso es igual a $\frac{1}{1-p}$,

donde p se define como la probabilidad de dejar seguir el proceso, es decir, de no detectar el cambio (Duncan, 1996). Conviene recordar que la probabilidad de detectar el cambio cuando se muestrea un paquete es 0,16 y que la probabilidad hacerlo cuando se muestrean cuatro paquetes es 0,84.

Sea X_1 la variable que cuenta el número de pruebas cuando se muestrea un solo paquete; y sea X_4 la variable que cuenta el número de pruebas cuando se muestrean cuatro paquetes. Entonces,

$$E[X_1] = \frac{1}{1-0,84} = 6,25 \text{ paquetes y } E[X_4] = \frac{1}{1-0,16} = 1,19$$

muestras de tamaño cuatro, es decir, $1,19 \times 4 = 4,76$ paquetes. Es decir, en promedio se deberán revisar 4,76 paquetes antes de que el gráfico de promedios indique que el proceso ha cambiado su centro; en contraste, se requiere revisar en promedio 6,25 paquetes antes de que el gráfico de medidas individuales indique que este cambio ha ocurrido.

3. Sensibilidad frente a la magnitud del descentramiento

Hasta aquí la comparación se ha limitado al análisis de una situación en la cual la magnitud del descentramiento es de $\delta\sigma = 2\sigma = (2)(5) = 10$ gramos. Los resultados de la comparación se resumen en la Tabla 1, e indican que ante un desplazamiento hacia arriba del centro del proceso de tal magnitud, el gráfico de control para medias es definitivamente más sensible que el gráfico de control para medidas individuales en cuanto a su habilidad para detectar un cambio en el centramiento del proceso.

Tabla 1: Resumen de resultados de comparación

Comparación	Muestras de un paquete cada dos minutos	Muestras de cuatro paquetes cada ocho minutos
Probabilidad de detectar el cambio	0,50	0,84
Tiempo necesario para detectar el cambio	11,5 minutos	8,52 minutos
Número de paquetes que se deben revisar en promedio antes de detectar el cambio	6,25 paquetes	4,76 paquetes

Surge sin embargo la duda sobre si estos resultados se repiten de manera similar ante un cambio de cualquier magnitud δ veces σ en el centro del proceso. A pesar de que resulta muy poco realista, se mantendrá como supuesto que se producirá un cambio permanente y estable en el centro del proceso, sin cambios en la variabilidad intrínseca del mismo, solamente para efectos comparativos.

3.1. Probabilidades de detección ante un cambio $\delta\sigma$ en el centro del proceso

Sea P_1 la probabilidad de detectar el cambio con el gráfico para medidas individuales cada dos minutos y P_4 la probabilidad de detectar el cambio con el gráfico para promedios de muestras de tamaño 4 cada ocho minutos. Un cambio de magnitud $\delta\sigma$ se referirá únicamente usando el símbolo δ . Por ejemplo, en las primeras comparaciones se estudió un cambio de magnitud 10, correspondiente a 2 veces la desviación estándar del proceso. Esta magnitud se asociará con un cambio de tamaño $\delta = 2$. En tal caso, $P_1 = 0,16$ y $P_4 = 0,84$.

En general, P_1 se puede encontrar como $P_1 = 1 - P[LIC \leq X \leq LSC]$, con X la medición individual y LIC y LSC los límites de control para el gráfico individual; y, en forma similar, P_4 se

encuentra como $P_4 = 1 - P[LICp \leq \bar{X} \leq LSCp]$, con LICp y LSCp los límites de control para el gráfico de promedios.

Si se asume que se produjo un cambio de magnitud δ en el centro del proceso, este cambio significa que el centro del proceso ha cambiado de estar en μ a estar en $\mu + \delta$. Entonces,

$$P_1 = 1 - [P(Z \leq 3 - \delta) - P(Z \leq -3 - \delta)] \quad y$$

$$P_4 = 1 - [P(Z \leq 3 - 2\delta) - P(Z \leq -3 - 2\delta)].$$

Sin embargo, no sería apropiado comparar directamente P_1 y P_4 , tal como ya se ilustró. En realidad P_4 se debe comparar con la probabilidad de que el gráfico individual detecte el cambio en las cuatro primeras mediciones, que está dada por

$$P_d = P_1 + (1 - P_1) P_1 + (1 - P_1)^2 P_1 + (1 - P_1)^3 P_1.$$

Y el gráfico de promedios será más adecuado que el gráfico de medidas individuales en la medida que P_4 sea mayor que P_d . La Figura 5 permite apreciar que en general el gráfico de promedios es más adecuado para detectar cambios que el gráfico individual; sin embargo, para valores de δ menores que aproximadamente 0,55 la situación se invierte y la probabilidad de detectar un cambio de tamaño δ es mayor cuando se utiliza un gráfico de medidas individuales.

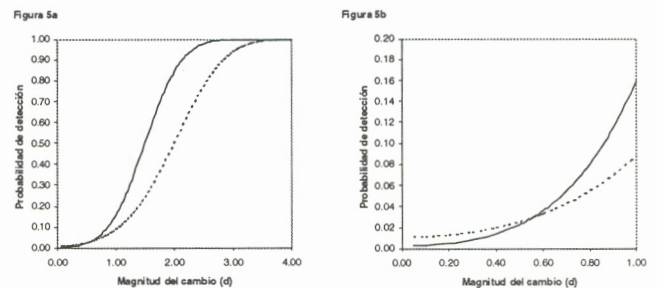


Figura 5: Comparación de las probabilidades de detección controlando medias de 4 observaciones (línea continua) y controlando observaciones individuales (línea punteada). A la izquierda (Figura 5a) para una magnitud del cambio (δ) entre 0 y 4; a la derecha (Figura 5b) para una magnitud del cambio (δ) entre 0 y 1.

3.2. Tiempos esperados de detección ante un cambio $\delta\sigma$ en el centro del proceso

Ya se mostró previamente que

$$E(T_1) = \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1) \times 0,16 \times 0,84^{i-1}$$

y

$$E(T_4) = \sum_{i=1}^{\infty} [(7+8(i-1))] \times 0,84 \times 0,16^{i-1}$$

Utilizando la notación de la sección anterior, se pueden reescribir estas expresiones como

$$y \quad E(T_4) = \sum_{i=1}^{\infty} [(7+8(i-1))] \times P_4 \times (1-P_4)^{i-1}$$

Por lo que se sigue que

$$E(T_1) = \frac{2-P_1}{P_1} \quad y \quad E(T_4) = \frac{8-P_4}{P_4}$$

Y el gráfico para medias detectará más rápidamente el cambio si $E(T_4) > E(T_1)$, lo que ocurre cuando $P_4 / P_1 > 4$. En la Figura 6 se han graficado $E(T_4)$ -líneas continuas- y $E(T_1)$ -líneas punteadas- para varios valores del cambio δ , la magnitud del desplazamiento del centro del proceso. La Figura 6 permite identificar bajo qué condiciones se satisface esta desigualdad.

La Figura 6 indica que el tiempo esperado de detección es menor cuando se usa un gráfico de control de medias cada ocho minutos que cuan-

do se usa un gráfico de medidas individuales cada dos minutos, solamente si el cambio δ se encuentra entre 0,55 y 2,30, aproximadamente.

3.3 Número promedio de piezas que deberán revisarse antes de que el gráfico indique que se ha producido un cambio $\delta\sigma$ en el centro del proceso

Sea ARL_1 el número promedio de piezas que deberán revisarse antes de que el gráfico individual indique que se ha producido un cambio de magnitud $\delta\sigma$ en el centro del proceso; y sea ARL_4 el número equivalente para el gráfico de control de medias de muestras de tamaño 4. A partir de $E(X_1)$ y $E(X_2)$ definidas en la Sección 2.3 y de P_1 y P_4 defini-

dos en la Sección 3.1, se sigue que $ARL_1 = \frac{1}{P_1}$ y

$ARL_4 = \frac{1}{P_4}$. Y como la comparación más justa es

entre ARL_1 y $(4 \times ARL_4)$, se sigue que $(4 \times ARL_4) > ARL_1$ solamente cuando $(P_4 / P_1) > 4$, lo cual conduce a las mismas conclusiones de la sección 3.3, es decir, que el gráfico de control para medias de tamaño 4 detecta más fácilmente un cambio de magnitud $\delta\sigma$ en el centro del proceso cuando δ está entre 0,55 y 2,30, aproximadamente.

4. Comentarios finales

Una comparación común en la literatura sobre el tema es entre gráficos de control para medidas individuales y gráficos de control para promedios de muestras de tamaño n , donde las medidas individuales y los promedios se toman con igual frecuencia. La conclusión es que los primeros son menos sensibles ante cambios pequeños que los segundos. En este trabajo se introduce la comparación entre los mismos gráficos de control, pero variando la frecuencia de muestreo para hacerlos comparables en términos del esfuerzo necesario para mantener ambos gráficos. En este caso particular se comparan gráficos de control para muestras de tamaño uno cada dos minutos con gráficos de control para promedios de muestras de tamaño cuatro cada ocho minutos. Y se concluye que los gráficos individuales son más sensibles para cambios pequeños (menores que 0,55 desviaciones estándar) y para cambios grandes (mayores que 2,30 desviaciones estándar) del centro del proceso; pero no necesariamente para cambios de magnitud mediana.

La razón para que el gráfico para medidas indivi-

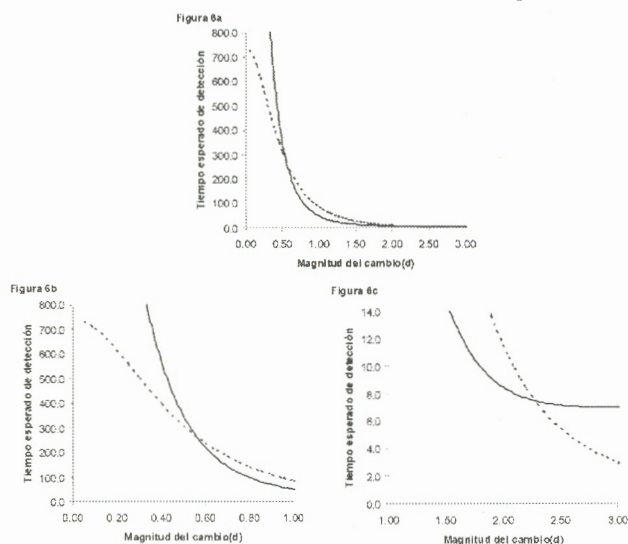


Figura 6: Comparación de los tiempos esperados de detección controlando medias de 4 observaciones (línea continua) y controlando observaciones individuales (línea punteada). Arriba (Figura 6a, para una magnitud del cambio (δ) entre 0 y 3; abajo a la izquierda (Figura 6b) para una magnitud del cambio (δ) entre 0 y 1; y abajo a la derecha (Figura 6c) para una magnitud del cambio (δ) entre 1 y 3.

duales sea más sensible para valores pequeños de α recae en que en este caso la distribución más adecuada para el cálculo de las probabilidades de detección es la distribución geométrica. Y la razón para que sea más sensible para desviaciones muy altas es que una desviación muy grande debería ser fácilmente detectada por cualquier medición del proceso. Por ejemplo, si el centro del proceso cambia seis desviaciones estándar hacia arriba, basta con una sola medición para detectar el cambio, casi con toda seguridad.

Aquí se han comparado muestras de tamaño uno cada dos minutos con muestras de tamaño cuatro cada ocho minutos. Una generalización interesante que no se discute en este trabajo es si los resultados se mantienen cuando se toman muestras de tamaño uno cada t minutos que se

comparan con muestras de tamaño n cada nt minutos, manteniendo constante la variabilidad del proceso.

Bibliografía

1. Duncan, A. J. (1996) *Control de Calidad y Estadística Industrial*, 5Ed, México: Alfa Omega.
2. Grant, E.I. y Leavenworth, R. S. (1996) *Statistical Quality Control*, 7Ed, Boston: McGraw-Hill
3. Montgomery, D. C. (1991) *Control Estadístico de la Calidad*, México: Iberoamérica.
4. Peña D.; Prat A. (1986). «Como Mejorar la Calidad». *Instituto de la pequeña y la mediana empresa industrial*. España.
5. Wackerly, D.D.; Mendenhall III,; Scheaffer, R.L. (2002) *Estadística Matemática con Aplicaciones*, Ed., México: Thomson



Universidad
del Valle

Escuela de Ingeniería
Industrial y Estadística

PROGRAMA DE FORMACIÓN PROFESIONAL EN PREGRADO

INGENIERÍA INDUSTRIAL

Perfil profesional:

- Diseñar, analizar y desarrollar sistemas productivos de bienes y servicios.
- Aplicar técnicas de mejoramiento de procesos.
- Evaluar financiera y económicamente la factibilidad de proyectos.
- Liderar procesos de cambio.
- Evaluar y gestionar el cambio tecnológico y la innovación, para contribuir a la productividad y competitividad de las organizaciones.



- Diseñar y optimizar cadenas y redes de suministro regionales e internacionales.

INFORMES:

Ciudad Universitaria Meléndez
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Industrial y
Estadística
Edificio: 346
Teléfonos: 331 52 74 - 321 22 22
Fax: 331 52 74
A.A. 25360
Cali, Colombia